

# LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

## Sommaire

---

<b>I</b>	<b>La conservation de la charge</b> . . . . .	<b>2</b>
I.1	Une première approche 1D . . . . .	2
I.2	Généralisation à 3D - conséquences . . . . .	3
	a - Equation locale de conservation de la charge . . . . .	3
	b - Cas du régime permanent/ARQS - loi des noeuds en ARQS . . . . .	4
<b>II</b>	<b>Les équations de Maxwell</b> . . . . .	<b>5</b>
II.1	L'équation de Maxwell Ampère - courants de déplacement . . . . .	5
	a - Quelque-chose manque à l'appel!!! . . . . .	5
	b - Signification physique des courants de déplacement : exemple de la décharge d'un condensateur . . . . .	6
II.2	Equation de Maxwell-Faraday : traduction locale de l'induction . . . . .	8
	a - Rappel de MPSI : mise en évidence de l'induction - f.e.m. . . . .	8
	b - Passage à l'échelle locale : l'équation locale de Maxwell-Faraday . . . . .	8
II.3	Bilan des équations locales de Maxwell- premières propriétés . . . . .	9
II.4	Traductions intégrales des équations de Maxwell - exemples élémentaires d'exploitation	10
II.5	Substitution à la traversée des interfaces chargées et/ou de courant : les relations de passage . . . . .	13
<b>III</b>	<b>L'approximation des régimes quasi-stationnaires - conséquences</b> . . . . .	<b>13</b>
III.1	Signification . . . . .	13
III.2	Conséquences sur les équations locales . . . . .	15
	a - Modification des équations de Maxwell en ARQS dite "magnétique" (cas le plus fréquent) . . . . .	15
	b - Modification des équations de Maxwell en ARQS électrique (cas plus rare)	16
<b>IV</b>	<b>Les équations de propagation des champs dans le vide : premier contact et     quelques premières conclusions!</b> . . . . .	<b>17</b>
IV.1	Etablissement . . . . .	17
IV.2	Nécessité du couplage électromagnétique - Retour sur l'ARQS . . . . .	18

---

# I La conservation de la charge

## I.1 Une première approche 1D

L'expérience en physique dégage dans tous les cas de figure que la charge électrique est un **invariant** : elle ne disparaît, ni n'apparaît pour un système fermé.

On se propose dans cette partie de dégager une **loi locale** traduisant cette propriété.

A RETENIR :

On considère une distribution de courant de vecteur densité volumique orienté selon l'axe  $[Ox]$  et ne dépendant spatialement que de la variable  $x$   $\vec{J} = J(x, t) \cdot \vec{e}_x$ . Isolons un volume élémentaire  $d\tau = S \cdot dx$  de surface  $S$  et de longueur  $dx$  fixe dans le référentiel d'étude, et établissons un bilan de charge entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

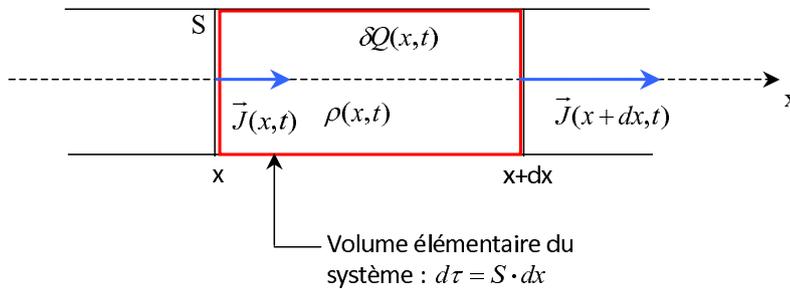


FIGURE XIII.1 – Conservation de la charge : établissement cadre 1D

BILAN DE CHARGE DU VOLUME  $d\tau = S \cdot dx$  :

► A LA DATE  $t$  :

$$\delta Q(t) = \rho(x, t) \cdot S dx$$

► A LA DATE  $t + dt$  :

$$\delta Q(t + dt) = \rho(x, t + dt) \cdot S dx$$

Evaluons la variation de charge du volume  $d\tau$  pendant  $dt$  de deux manières :

- Par différence des deux relations précédentes :

$$d[\delta Q] = \delta Q(t + dt) - \delta Q(t) = \underbrace{[\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)]}_{= \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \cdot dt} \cdot S dx = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \cdot dt S dx \quad (\text{XIII.1})$$

- Par bilan des courants entrant et sortant :

$$d[\delta Q] = [I(x, t) - I(x + dx, t)] \cdot dt = \left[ \iint_{S(x)} \vec{J}(x, t) \cdot \vec{dS} - \iint_{S(x, dx)} \vec{J}(x + dx, t) \cdot \vec{dS} \right] \cdot dt$$

$$= [J_x(x, t) - J_x(x + dx, t)] S \cdot dt = -\frac{\partial J_x(x, t)}{\partial x} \cdot dx \cdot S \cdot dt \quad (\text{XIII.2})$$

En égalisant XIII.1 et XIII.2, il vient :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \cdot dt S dx = -\frac{\partial J_x(x, t)}{\partial x} S \cdot dt$$

soit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J_x(x, t)}{\partial x} = 0}$$

## I.2 Généralisation à 3D - conséquences

### a - Equation locale de conservation de la charge

Reprenons la démonstration précédente par une approche locale 3D (hors programme)

Considérons le volume  $V$  fixe d'un matériau immobile ou bien d'espace dans le référentiel d'étude. Si l'on appelle  $\rho(M, t)$  la densité volumique de charge alors la charge totale de  $V$  est :

$$Q(t) = \iiint_V \rho(M, t) \times d\tau$$

Evaluons son taux de variation dans le temps; on a :

$$Q(t + dt) = \iiint_V \rho(M, t + dt) \times d\tau$$

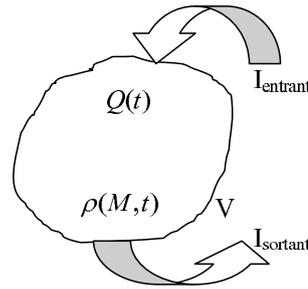


FIGURE XIII.2 – Conservation de la charge

ainsi

$$dQ = Q(t + dt) - Q(t) = \iiint_V \left[ \underbrace{\rho(M, t + dt) - \rho(M, t)}_{\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} dt} \right] \times d\tau$$

$$\text{soit finalement : } \frac{dQ(t)}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} \times d\tau$$

Si ce taux de variation est non nul, le principe de conservation de la charge impose un échange (positif ou négatif) de charge avec l'extérieur du volume  $V$ .

En remarquant, comme dans la démonstration 1D, que le taux de variation de la charge correspond simplement au courant traversant la frontière de  $V$ , en tenant compte bien sûr du sens des flux de charges entrant et/ou sortant, on peut écrire :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \underbrace{I_{entrant} - I_{sortant}}_{=I_{total}} = \oiint_{S/V} -\vec{J}(M,t) \cdot \vec{n}_{ex} \times dS$$

le signe – devant l'intégrale de flux provenant de la normale aux surfaces fermées toujours orientée vers l'extérieur.

Soit :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} \times d\tau = \oiint_{S/V} -\vec{J}(M,t) \cdot \vec{n}_{ex} \times dS$$

avec  $\vec{n}$  vecteur unitaire normal de surface orienté vers l'extérieur

En appliquant la relation de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} \times d\tau = - \iiint_V \text{div} \vec{J}(M,t) \times d\tau$$

En regroupant les deux termes dans le même membre, on obtient l'équation locale de conservation de la charge généralisée à 3D appelée aussi équation de continuité de la charge :

PROPRIÉTÉ - (I.2) - 1:

$$\text{Equation locale de conservation de la charge} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \text{div} \vec{J}(M,t) = 0 \quad (\text{XIII.3})$$

**b - Cas du régime permanent/ARQS - loi des noeuds en ARQS**

Dans le cadre des régimes permanents ou de l'ARQS électrocinétique on a stationnarité de la charge volumique  $\rho$ , soit :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} = 0$$

ce qui impose la relation locale  $\text{div} \vec{J} = 0$

En intégrant cette relation sur un volume autour d'un noeud de courant il vient avec le théorème de G.O. :

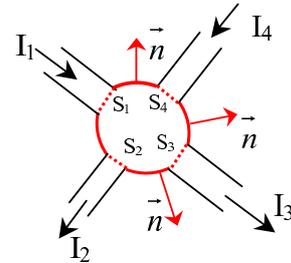


FIGURE XIII.3 – Loi des noeuds

$$\iiint_V \text{div} \vec{J} \cdot d\tau = \oiint_{S/V} \vec{J} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \dots = - \sum_{k=1}^n I_k = 0$$

les courants étant comptés positivement lorsqu'ils arrivent sur le noeud. On retrouve la loi des noeuds avec :

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

## II Les équations de Maxwell

### II.1 L'équation de Maxwell Ampère - courants de déplacement

a - Quelque-chose manque à l'appel!!!

Ecrivons la forme locale du théorème d'Ampère dégagée en cours de magnétostatique :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

il vient avec la propriété vectorielle  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}) \equiv 0$  :  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{J} = 0$

soit :  $\text{div} \vec{J} = 0$

Cette dernière équation est incompatible avec la relation de conservation de la charge établie précédemment dans le cadre le plus général i.e. pour tout régime :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0$$

Ainsi, l'équation locale traduisant le théorème d'Ampère dégagée en magnétostatique ne convient donc pas à la description de tout régime.

Pour assurer la compatibilité avec les régimes variables, l'idée de Maxwell fut d'ajouter un terme de courant supplémentaire  $\vec{j}_D$  au courant de conduction  $\vec{j}$  ; ainsi :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_D)$$

en prenant la divergence de cette dernière équation et en tenant compte de  $\text{div}[\overrightarrow{\text{rot}}] \equiv 0$ , on obtient :

$$\text{div}(\vec{j} + \vec{J}_D) = 0$$

soit avec l'équation de conservation de la charge :

$$\text{div} \vec{J}_D = -\text{div} \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En supposant la validité de la forme locale du théorème de Gauss pour tout régime, on a  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \left[ \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

on a finalement :

$$\text{div} \vec{J}_D = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \left[ \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

Ainsi, une forme compatible est :

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La forme locale du théorème d'Ampère pour tout régime appelée **équation de Maxwell-Ampère** s'écrit donc :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{XIII.4})$$

REMARQUE - (II.1) - 1:

Historiquement, Maxwell appela le terme  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  «courants de déplacement». La suite propose une interprétation physique de ce terme afin de justifier une telle appellation.

**Exercice de cours:** (II.1) - n° 1 Retrouver l'équation de conservation de la charge à partir de l'équation de Maxwell-Ampère. On utilisera la relation  $\text{div}(\vec{\text{rot}}) \equiv 0$

**b - Signification physique des courants de déplacement : exemple de la décharge d'un condensateur**

Prenons le cas d'un condensateur initialement chargé, et se déchargeant dans une résistance  $R$ .

Appliquons le théorème d'Ampère sur le contour  $\mathcal{C}$  en exploitant la relation de Stokes Ampère dans 2 cas de figure :

■ SANS PRISE EN COMPTE DES COURANTS DE DÉPLACEMENT :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S/\mathcal{C}} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{S/\mathcal{C}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I \quad (1)$$

Choisissons maintenant d'intégrer sur la surface  $\Sigma$  s'appuyant toujours sur le contour  $\mathcal{C}$  mais passant cette fois entre les armatures du condensateur, espace dans lequel aucun courant physique n'existe (aucune charge physique ne traverse la surface  $\Sigma$ ) :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma/\mathcal{C}} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma/\mathcal{C}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0!!! \quad (2)$$

**Commentaires :** il apparaît ici une incohérence entre les relations (1) et (2); en fait la seconde surface ( $S''$ ) qui plonge dans l'espace inter-armature du condensateur est traversée par des courants dont nous n'avons pas tenu compte. Ce sont les *courants de déplacement* évoqués dans l'équation de Maxwell-Ampère, et dont la densité volumique est :

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

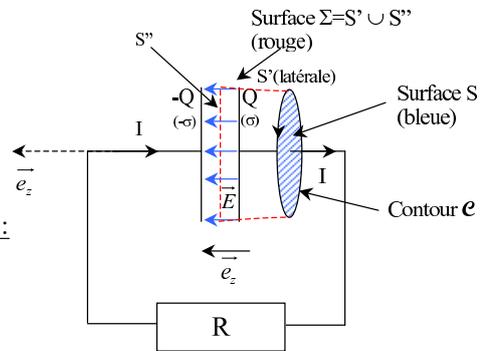


FIGURE XIII.4 – Décharge d'un condensateur plan dans une résistance  $R$

■ AVEC PRISE EN COMPTE DES COURANTS DE DÉPLACEMENT :

Ces courants sont proportionnels au taux de variation du champ électrique  $\vec{E}$  et possède la même direction que ce dernier.

VÉRIFICATION :

En retenant l'hypothèse du condensateur plan idéal, le champ électrique en tout point de l'espace s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{E}_{ext} = \vec{0} \\ \vec{E}_{int} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{Q}{\epsilon_0 S''} \vec{e}_z \end{cases}$$

Reprenons la démarche précédente d'application du théorème d'Ampère sur les deux surfaces  $S$  et  $\Sigma$  en tenant cette fois compte des courants de déplacement :

- Sur  $S$  :

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S/c} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{S/c} [\vec{J} + \underbrace{\vec{J}_D}_{=\vec{0}}] \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

- Sur  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \iint_{\Sigma/c} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma/c} [\underbrace{\vec{J}}_{=\vec{0}} + \vec{J}_D] \cdot d\vec{S} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_{S''} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \iint_{S''} \frac{1}{\epsilon_0 S''} \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{= \frac{dQ}{dt} = I} \vec{e}_z \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{S''} \frac{1}{S''} I dS = \mu_0 I!!!! \end{aligned}$$

CONCLUSION : On voit sur cet exemple simple que la prise en compte des courants de déplacement permet de corriger l'incohérence constatée et de généraliser le théorème d'Ampère aux régimes quelconques.

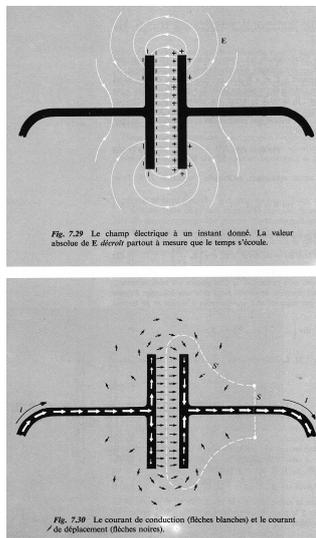
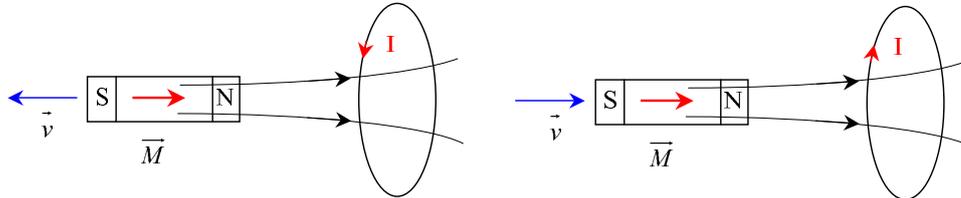


FIGURE XIII.5 – Courants de conduction et de déplacement lors de la décharge d'un condensateur (extrait cours de Physique Berkeley vol.II Edward Mills Purcell 1963 (Nobel de physique 1952))

II.2 Equation de Maxwell-Faraday : traduction locale de l'induction

a - Rappel de MPSI : mise en évidence de l'induction - f.e.m.

En mettant un aimant de moment dipolaire  $\vec{M}$  en mouvement sur l'axe d'une spire fermée de résistance totale  $R$ , on constate deux effets différents suivant le sens de déplacement de l'aimant :



Cas a) : Aimant qui s'éloigne de la spire :  $\vec{B} \downarrow$     Cas b) : Aimant qui se rapproche de la spire :  $\vec{B} \uparrow$

FIGURE XIII.6 – Mise en évidence expérimentale de l'induction

- AIMANT QUI S'ÉLOIGNE DE LA SPIRE (CAS A) :  
on a :  $\|\vec{B}\| \searrow$  sur la spire  $\Rightarrow \Phi_{spire}(\vec{B}) \searrow$  et il apparaît  $I > 0$  et donc un champ induit pour tenter d'augmenter le flux  $\Rightarrow$  **effet de modération**
- AIMANT EN RAPPROCHEMENT :  
on a :  $\|\vec{B}\| \nearrow$  sur la spire  $\Rightarrow \Phi_{spire}(\vec{B}) \nearrow$  et il apparaît  $I < 0$  et donc un champ induit pour tenter de diminuer le flux  $\Rightarrow$  **effet de modération**

**CONCLUSION :** il apparaît une f.e.m. dans le circuit et donc la circulation de  $\vec{E}$  sur la spire **ne peut être nulle dans ce régime variable** (on rappelle que la circulation entre deux points permet d'évaluer la différence de potentiel); ainsi, on pose la f.e.m.  $e$  apparaissant en régime variable :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

par ailleurs, l'expérience montre que la f.e.m. est reliée à la variation du flux  $\Phi(t)$  du champ magnétique à travers la spire de courant par :

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad \text{loi de Lenz-Faraday}$$

b - Passage à l'échelle locale : l'équation locale de Maxwell-Faraday

On a :

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{1}{dt} \cdot d \left[ \iint_{S/c} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \frac{1}{dt} \left[ \iint_{S/c} \vec{B}(M, t + dt) \cdot d\vec{S} - \iint_{S/c} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S} \right]$$

soit :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{dt} \left[ \iint_{S/c} [\vec{B}(M, t + dt) - \vec{B}(M, t)] \cdot d\vec{S} \right] = -\frac{1}{dt} \left[ \iint_{S/c} \left( \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \cdot dt \right) \cdot d\vec{S} \right]$$

$$= - \iint_{S/c} \left( \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS}$$

ainsi en appliquant le théorème de Stokes-Ampère au premier membre de cette relation il vient :

$$\iint_{S/c} \vec{rot} \vec{E} \cdot \vec{dS} = - \iint_{S/c} \left( \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS}$$

d'où l'on tire :

$$\vec{rot} \vec{E}(M, t) = - \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \quad \text{équation de Maxwell-Faraday}$$

### II.3 Bilan des équations locales de Maxwell- premières propriétés

Entre 1856 et 1864, J.C. Maxwell énonça et publia un ensemble quatre équations locales cohérentes contenant «tout l'électromagnétisme» ; ces résultats sont appelés **équations de Maxwell**, et contiennent toutes les propriétés du champ électromagnétique : structure, lien avec ses sources  $(\rho, \vec{J})$ , phénomène d'induction électromagnétique, prévisions de la propagation du champ électromagnétique etc...

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-flux ou Maxwell-Thomson} \quad (\text{XIII.5})$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Gauss} \quad (\text{XIII.6})$$

$$\vec{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Faraday} \quad (\text{XIII.7})$$

$$\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Ampère} \quad (\text{XIII.8})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} & \text{perméabilité magnétique du vide} \\ \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ F.m}^{-1} & \text{permutivité diélectrique du vide} \end{cases} \quad \text{et } \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

REMARQUE - (II.3) - 2:

- Les champs électrique et magnétique sont couplés dans deux des équations. Nous verrons plus bas que ce couplage est à l'origine de la propagation du champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ .
- Les équations de Maxwell sont linéaires.
- Dans le cas stationnaire  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère conduisent aux équations locales établies dans le cadre de la statique, soit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad \text{(XIII.9)}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \text{(XIII.10)}$$

## II.4 Traductions intégrales des équations de Maxwell - exemples élémentaires d'exploitation

Les théorèmes de Green-Ostrogradski (GO) et Stokes Ampère (SA) permettent d'établir le lien entre formulations locale et intégrale. En effet, en intégrant les équations locales, on retrouve les principales propriétés et théorèmes intégraux de l'électromagnétisme déjà abordés :

$$\text{Maxwell-Gauss (MG)} \rightarrow \text{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0} \stackrel{\text{GO}}{\Leftrightarrow} \iint_{S/V} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V/S} \rho(M, t) \cdot d\tau \quad \text{Théorème de Gauss}$$

$$\text{Maxwell-Thomson (MT)} \rightarrow \text{div} \vec{B}(M, t) = 0 \stackrel{\text{GO}}{\Leftrightarrow} \iint_{S/V} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{Conservation du flux magnétique}$$

$$\text{Maxwell-Faraday (MF)} \rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \stackrel{\text{SA}}{\Leftrightarrow} e = \oint_{c/S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{s/c} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{Loi de l'induction de Lenz-Faraday (MPSI)}$$

$$\text{Maxwell-Ampère (MA)} \rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \left[ \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \stackrel{\text{SA}}{\Leftrightarrow} \oint_{c/S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{s/c} \left[ \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlac. total}}$$

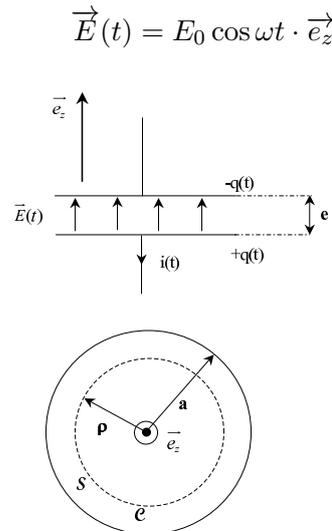
**Théorème d'Ampère généralisé**

### EXEMPLES D'APPLICATIONS :

#### • Champ magnétique dans un condensateur plan en régime variable

On considère ici un condensateur plan intégré dans un circuit en régime variable, c'est à dire ayant une charge variant en fonction du temps.

En supposant le condensateur plan idéal, le champ électrique est supposé sinusoïdal, homogène entre les armatures, et nul à l'extérieur, (i.e. pas d'effets de bord) :



NB : le régime étant variable, le champ électrique entre armature est variable au cours du temps :  $\vec{E}(t)$ . L'équation de Maxwell-Ampère montre l'existence d'un champ magnétique entre les armatures du condensateur (pas de courant physique dans cet espace, mais des courants de déplacement !!) :

$$\underbrace{\vec{rot} \vec{B}}_{\neq \vec{0}} = \mu_0 \left[ \underbrace{\vec{J}}_{=\vec{0}} + \epsilon_0 \underbrace{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\neq \vec{0}} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

QUESTION : déterminer complètement le champ magnétique entre les armatures du condensateur.

- ◇ GÉOMÉTRIE DU PROBLÈME : axe de symétrie  $[Oz)$   $\implies$  on adopte les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$
- ◇ TOPOGRAPHIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Tout plan contenant  $[Oz) \equiv \Pi^+ \implies \vec{B} \parallel \vec{e}_\theta \implies \vec{B} = B(\rho, \theta, z, t) \cdot \vec{e}_\theta$

Invariance par rotation d'angle  $\forall \theta \implies B(\rho, \theta, z, t)$

**Bilan :**

$$\vec{B} = B(\rho, z, t) \cdot \vec{e}_\theta$$

- ◇ DÉTERMINATION DE LA NORME DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Choisissons une surface  $S$  s'appuyant sur un contour  $C$  entre les deux armatures et intégrons l'équation de Maxwell-Ampère, ce qui revient à appliquer le théorème d'Ampère généralisé :

$$\iint_{S/C} \vec{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{c^2} \iint_{S/C} \frac{d\vec{E}(t)}{dt} \cdot d\vec{S}$$

qui devient en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oint_{C/S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2} \iint_{S/C} \frac{d\vec{E}(t)}{dt} \cdot d\vec{S}$$

On choisit un contour  $\mathcal{C}$  circulaire de rayon  $\rho$  et d'axe  $[Oz]$  afin de pouvoir transformer le produit scalaire  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  en produit des normes  $B \cdot dl$  avec  $B = cste$  sur le contour  $\mathcal{C}$ ; ainsi, l'intégration est immédiate et ne pose aucune difficulté. On trouve :

$$\vec{B}(\rho < a, t) = \frac{\rho}{2c^2} \frac{dE(t)}{dt} \cdot \vec{e}_\theta = -\frac{\rho}{2c^2} E_0 \omega \times \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_\theta$$

et

$$\vec{B}(\rho > a, t) = \frac{a^2}{2c^2} \frac{dE(t)}{dt} \cdot \vec{e}_\theta = -\frac{a^2}{2c^2} \frac{E_0}{\rho} \omega \times \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_\theta$$

#### REMARQUE - (II.4) - 3:

A l'extérieur du condensateur  $\rho > a$  le champ électrique est nul, et il n'y a aucun courant physique non plus ainsi :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(\rho > a, z, t) = \mu_0 \left[ \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = \vec{0}$$

mais on a cependant  $\vec{B}(\rho > a, z, t) \neq \vec{0} !!!$  Donc  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0} \not\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$

### • Champ électrique dans un solénoïde infini en régime variable

Considérons maintenant un solénoïde supposé infini d'axe  $[Oz]$  comportant  $n$  spire par unité de longueur et parcouru par un courant variable  $I$  :

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega t)$$

Le champ magnétique au sein de solénoïde est donc :  $\vec{B} = \mu_0 n I_0 \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_z$

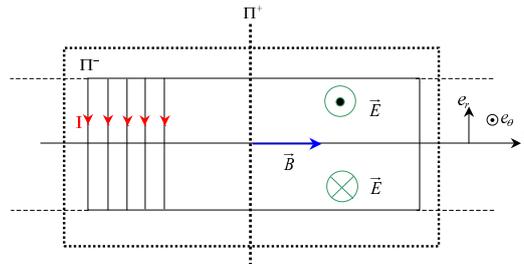
Le caractère variable du courant et donc du champ magnétique du solénoïde entraîne l'existence d'un champ électrique dans son espace vide, ce que montre l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

#### ◇ TOPOGRAPHIE DU CHAMP ÉLECTRIQUE

Tout plan contenant  $[Oz] \equiv \Pi^- \implies \vec{E} \parallel \vec{e}_\theta \implies \vec{E} = E(\rho, \theta, z, t) \cdot \vec{e}_\theta$

Invariance par rotation d'angle  $\forall \theta \implies E(\rho, \theta, z, t)$



Bilan :

$$\vec{E} = E(\rho, z, t) \cdot \vec{e}_\theta$$

◇ DÉTERMINATION DE LA NORME DU CHAMP ÉLECTRIQUE

Compte tenu de la topographie du champ électrique, choisissons là-encore un contour circulaire  $\mathcal{C}$  d'axe  $[Oz)$  de rayon  $\rho$  sur lequel s'appuie la surface  $S$  plane pour intégrer l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\iint_{S/c} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = - \iint_{S/c} \frac{d\vec{B}(t)}{dt} \cdot \vec{dS}$$

qui devient en utilisant le théorème de Stokes-Ampère :

$$\oint_{c/s} \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \frac{d}{dt} \iint_{S/c} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

On trouve sans problème après intégration :

$$\vec{E}(\rho < a, t) = \frac{\rho}{2} \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_\theta$$

et

$$\vec{E}(\rho > a, t) = \frac{\rho}{2} \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_\theta$$

## II.5 Substitution à la traversée des interfaces chargées et/ou de courant : les relations de passage

Rappel des relations de passage en live!

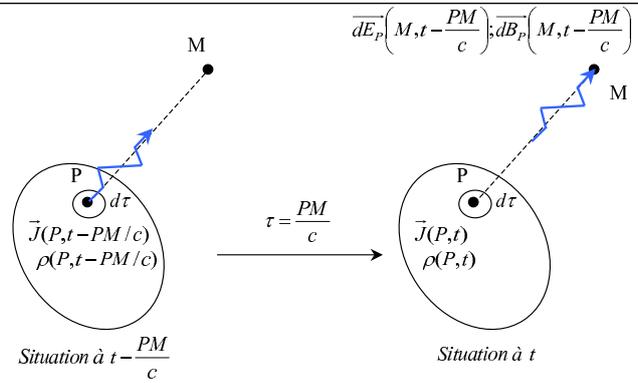
## III L'approximation des régimes quasi-stationnaires - conséquences

### III.1 Signification

Lorsqu'un champ est mesuré en un point  $M$  à la date  $t$ , et qu'il est engendré par des sources situées en des points  $P$  distants de  $PM$ , les modifications de l'état des sources doivent nécessairement se propager pour être ressenties au "point de mesure"  $M$ ; aussi, le champ électromagnétique se propageant à la célérité  $c$  dans le vide (cf cours sur ondes électromagnétiques chap. XIV), le temps de parcours caractéristique  $\tau$  de cette propagation est donc de l'ordre de :

FIGURE XIII.7 – Temps de propagation des signaux électromagnétiques  

$$\tau \simeq \frac{PM}{c}$$



en supposant une distribution source de dimension caractéristique faible par rapport à  $PM$ , afin de pouvoir choisir un point moyen  $P$  représentatif de celle-ci.

**DÉFINITION - (III.1) - 1:**  
 L'ARQS consiste à négliger le temps  $\tau$  de parcours du champ électromagnétique entre ses sources en  $P$  et le point de mesure en  $M$ , i.e. de poser que  $c \rightarrow \infty$ .

CRITÈRE :

Appelons  $D \sim PM$  la distance caractéristique sur laquelle le champ se propage; si les variations d'état des sources se font sur un intervalle de temps caractéristique  $T$  (une période par exemple dans le cas d'une variation périodique), alors l'ARQS impliquera :

$$\tau = \frac{D}{c} \ll T \Rightarrow \frac{\tau}{T} \ll 1$$

soit finalement pour toute distance  $D$  entre source et point de mesure :

$$D \ll cT = \lambda \quad \lambda \text{ longueur d'onde de l'onde propagée} \tag{XIII.11}$$

ILLUSTRATION : considérons un circuit comportant un générateur d'impulsion de courant et une résistance;

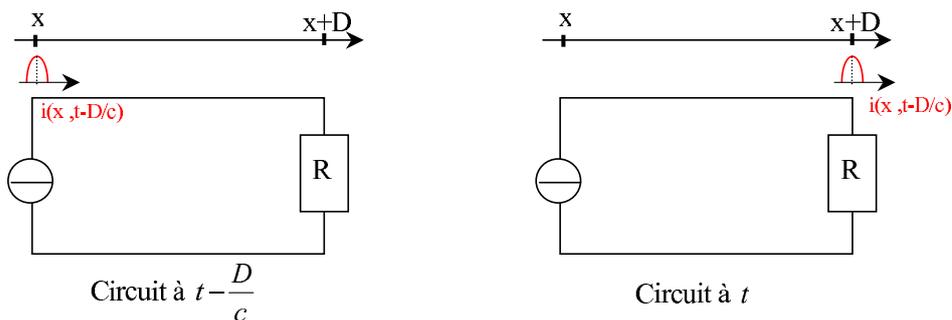


FIGURE XIII.8 – Illustration électrocinétique de l'ARQS

Le signal de courant s'étant propagé de  $x$  à  $x + D$  pendant la durée  $D/c$ , on peut écrire :  $i(x + D, t) = i(x, t - D/c)$

qui devient si l'on postule  $c \rightarrow \infty$  :

$$i(x + D, t) = i(x, t)$$

**Conclusion** : courant identique dans tout le circuit série en ARQS.

**Exemple numérique** : en live

### III.2 Conséquences sur les équations locales

a - **Modification des équations de Maxwell en ARQS dite "magnétique" (cas le plus fréquent)**

L'application de l'ARQS aux équations de Maxwell nécessite de revisiter ces dernières (en supposant tout milieu identique au vide en terme de permittivité diélectrique et perméabilité magnétique) :

On montre qu'une forme possible pour un champ de propagation harmonique s'écrit, par exemple pour le champ électrique (onde dite "plane") :

$$\vec{E} = E_0 \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi) \cdot \vec{u}$$

Appelons :  $\left\{ \begin{array}{l} D \text{ une distance caractéristique du problème} \\ T \text{ un temps caractéristique de variation des sources} \\ E_0 \text{ l'amplitude caractéristique de } \vec{E}(\vec{r}, t) \\ B_0 \text{ l'amplitude caractéristique de } \vec{B}(\vec{r}, t) \end{array} \right.$

Conséquence sur les opérateurs :  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{1}{T} \\ \|\vec{grad}\|, \|\vec{rot}\|, div \sim \frac{1}{D} \end{array} \right.$

Ainsi,

- L'équation de Maxwell-flux reste identique puisqu'elle comporte un second membre nul.
- l'équation de Maxwell-Gauss donne en comparant simplement les ordres de grandeurs :  $\frac{E_0}{D} \simeq \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$
- l'équation de Maxwell-Faraday donne  $\frac{E_0}{D} \simeq \frac{B_0}{T}$  c'est à dire le lien entre les amplitude  $E_0$  et  $B_0$ .
- l'équation de Maxwell-Ampère est un peu plus délicate à interpréter ;  
On rappelle que

$$\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{rot} \vec{B}\| \simeq \frac{B_0}{D} \\ \|\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\| \simeq \frac{1}{c^2} \frac{E_0}{T} \end{array} \right.$$

En comparant ces deux derniers termes, on obtient :

$$\frac{\|\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\|} \simeq \frac{\frac{E_0}{c^2 T}}{\frac{B_0}{D}} = \frac{\frac{E_0}{c^2 T}}{\frac{T E_0}{D^2}} = \frac{D^2}{c^2 T^2} \ll 1 \text{ (ARQS magnétique)}$$

Ainsi, en ARQS magnétique, les courants de déplacements sont négligeables et :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} \stackrel{\text{ARQS magn.}}{=} \mu_0 \vec{J}$$

Le bilan des équations de Maxwell en ARQS magnétique est donc :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-flux} \quad (\text{XIII.12})$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Gauss} \quad (\text{XIII.13})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Faraday} \quad (\text{XIII.14})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Ampère} \quad (\text{XIII.15})$$

MODIFICATION DE LA LOI DE CONSERVATION DE LA CHARGE - RETOUR SUR LA LOI DES NOEUDS  
 En prenant la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère "revisitée" en ARQS magnétique, on obtient :

$$\text{div} [\vec{\text{rot}} \vec{B}] = \mu_0 \text{div} \vec{J}$$

or avec l'identité  $\text{div} [\vec{\text{rot}}] \equiv 0$

on obtient la traduction locale de la loi des noeuds :

$$\boxed{\text{div} \vec{J} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (\text{XIII.16})$$

**CONCLUSION** : en ARQS magnétique (la plus fréquente) on retrouve toutes les propriétés du champ magnétique statique, en revanche il existe un champ électrique induit. On retrouve cette situation dans l'espace vide d'une bobine électrique dans laquelle existe un champ électrique induit (cf chapitre XIV).

### b - Modification des équations de Maxwell en ARQS électrique (cas plus rare)

Dans certains cas (étude d'un condensateur en régime variable par exemple : cf TD) à l'inverse de l'ARQS magnétique, on peut négliger les courants physiques sur les courants de déplacement i.e. les effets magnétiques sur les effets électriques, i.e. **on néglige l'induction** ;

Le bilan des équations de Maxwell en ARQS électrique est donc :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-flux} \quad (\text{XIII.17})$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Gauss} \quad (\text{XIII.18})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Faraday en ARQS électrique} \quad (\text{XIII.19})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Ampère en ARQS électrique} \quad (\text{XIII.20})$$

CONCLUSION : en ARQS électrique (la moins fréquente) on retrouve toutes les propriétés du champ électrique statique, en revanche il existe un champ magnétique "induit" (puisque  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \neq \vec{0}$ ). On retrouve cette situation dans l'espace interarmatures d'un condensateur dans lequel aucun courant physique n'existe, à l'inverse des courants de déplacement qui dominent ; il y existe un champ magnétique (cf chapitre XIV).

## IV Les équations de propagation des champs dans le vide : premier contact et quelques premières conclusions !

### IV.1 Etablissement

Considérons une région d'espace vide de charge et de courant, i.e. «vide électromagnétique» :

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = \vec{0} \end{cases}$$

Rappelons les équations de Maxwell de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, ou **équations de couplage des champs** ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

et

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

**Formulaire** :  $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}) - \overrightarrow{\Delta}$

En prenant le rotationnel de l'équation de MF, et en tenant compte de l'absence de charge, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[ \underbrace{\text{div} \vec{E}}_{=0} \right] - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} = - \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}}{\partial t}$$

ce qui devient avec l'équation de Maxwell-Ampère indiquée plus haut :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \text{Equation de d'Alembert à 3D} \quad (\text{XIII.21})$$

**Expression développée en coordonnées cartésiennes :**

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

**Exercice de cours:** (IV.1) - n° 2 Reprendre cette démarche avec le champ magnétique, et montrer que :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad (\text{XIII.22})$$

Ainsi, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont tous deux régis par la même équation aux dérivées partielles appelée **Equation de d'Alembert à 3D**.

Nous montrerons dans le cours sur les ondes électromagnétiques que cette équation caractérise la propagation du champ  $(\vec{E}, \vec{B})$  à la célérité  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ .

#### IV.2 Nécessité du couplage électromagnétique - Retour sur l'ARQS

En appelant  $D$  et  $T$  respectivement une longueur et une durée caractéristiques du problème ; avec l'ARQS revenant à négliger les temps de propagation des ondes, on a :

$$D \ll cT$$

Le cas limite revient à poser une vitesse de propagation infinie  $c \rightarrow \infty$  modifiant ainsi l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot} \vec{B}(M, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \longrightarrow \vec{0}$$

CONSÉQUENCE : absence de couplage  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$  dans l'équation de MA. les équations de propagation des champs deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{E}(M, t) = \vec{0} \\ \Delta \vec{B}(M, t) = \vec{0} \end{array} \right\} \neq \text{EDA}$$

⇒ Les solutions de ces équations ne sont pas propagatives.

**PROPRIÉTÉ - (IV.2) - 2:**

*On retiendra que la propagation des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  est liée à l'existence d'un couplage des équations de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .*

*L'"extinction" de ce couplage dans l'une des équations de MF et MA au moins entraîne la disparition des durées de propagation (et donc de la notion même de propagation !); on est bien ici dans le cadre de l'ARQS où par exemple un système récepteur perçoit instantanément les modifications du champ électromagnétique liées à une modification de l'état de ses sources !!!*